



XII. MAGYAR MECHANIKAI KONFERENCIA

MaMeK, 2015

Miskolc, 2015. augusztus 25-27.

SZÁN SZABÁLYOZÁSÁNAK HATÁSA AZ ESZTERGÁLÁS REGENERATÍV REZGÉSEIRE

Lehotzky Dávid¹, Insperger Tamás² és Stépán Gábor³

^{1,2,3}Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Műszaki Mechanikai Tanszék, 1111 Budapest
lehotzky@mm.bme.hu, insperger@mm.bme.hu, stepan@mm.bme.hu

Absztrakt: Jelen tanulmány az esztergálási folyamatban a szán szabályozási paramétereinek szerszámvég stabilitására gyakorolt hatását vizsgálja, figyelembe véve a szabályozás diszkrét mintavételezését és beavatkozását, valamint a kettő közötti holtidőt. Az alkotott modell stabilitási térképeit közelítés után analitikusan, illetve közelítés nélkül, numerikus módszer segítségével is meghatározzuk és összehasonlítjuk a szán szabályozásának digitális voltát figyelmen kívül hagyó modell eredményeivel. Az eredmények azt mutatják, hogy a szabályozó időkéésének elhanyagolása jelentős hibákat eredményezhet a kiszámított stabilitási tartományokban.

Kulcsszavak: szerszámgéprezgés, digitális szabályozás, regeneratív rezgés, időkééseltetés, stabilitás

1. BEVEZETÉS

A szerszámgéprezgés régóta kutatott terület a gépészeti szakirodalomban. Már az 1900-as évek elejétől ismert a jelenség [1], ugyanakkor annak lényegi tulajdonságait megragadó matematikai modell megalkotására először csak az 1900-as évek második felében került sor [2, 3]. A szerszámgéprezgések olyan öngerjesztett rezgések amelyek az ún. regeneratív hatáshoz köthetők. A regeneratív jelenség lényege, hogy a forgácsolási folyamat közben a szerszám rezgései rámásolódnak a munkadarabra, amelynek következtében a szerszám egy körbefordulás után már hullámos felületet vág. A szerszámvég múltbeli rezgései „tárolódnak” a munkadarab felszíni hullámosságában és kihatással vannak a szerszámvég jelenbeli mozgására. Ennek következtében a regeneratív rezgéseket késleltetett differenciálegyenletekkel lehet modellezni.

A szerszámgéprezgések szakirodalomban található mechanikai modelljei többnyire feltételezik, hogy a szerszámot mozgató szán és a munkadarab közötti relatív mozgást pontosan a beállított állandó előtolási sebesség határozza meg. Ezen modellek csak a szán és a szerszámvég közötti relatív mozgást modellezik. A szán előírt pályán való tartását a valóságban azonban egy pozíció szabályozási kör biztosítja, így a szabályozó véges dinamikája miatt az előtolási sebesség az előírt érték körül ingadozik. Jelen tanulmány az esztergálási folyamat esetén vizsgálja, hogy a szán pozíció szabályozásának figyelembe vétele hogyan változtatja szerszámvég stabilitási tulajdonságait. Eltérően a [4]-ben ismertetett modellel, itt a szabályozó mintavételezését és időkéését is figyelembe vesszük a modellezés során. A kapott eredményeket stabilitási diagramokon szemléltetjük a megmunkálási paraméterek síkján és összehasonlítjuk az esztergálási folyamat általánosan használt (a szán szabályozásának hatását figyelmen kívül hagyó) modelljének ismert eredményeivel (lásd pl. [5]-ben az 5.1.2 fejezetet), valamint a [4]-ben ismertetett folytonos idejű, késleltetés nélküli szabályozással kapott eredményekkel.

Az felállított modell matematikai vizsgálatát nehezíti, hogy a mozgásegyenlet egy hibrid késleltetett differenciálegyenlet rendszer, amelynek stabilitása csak numerikus módszer segítségével vizsgálható. Jelen tanulmány a numerikus módszerrel végzett stabilitási vizsgálaton kívül egy - a mozgásegyenletet közelítő - nem hibrid késleltetett differenciálegyenlet stabilitását is meghatározza analitikus úton és összeveti a numerikus módszer eredményeivel.

A cikk felépítése a következő. A második fejezetben az alkotott mechanikai modell és annak mozgásegyenlete kerül ismertetésre. A harmadik fejezet a mozgásegyenletek nem hibrid közelítő egyenletének stabilitási vizsgálatát részletezi. A negyedik fejezetben a mozgásegyenlet stabilitási vizsgálatára használt numerikus módszer kerül bemutatásra. Az ötödik fejezet pedig közli és értékeli a kiszámított eredményeket, amelyeket az utolsó fejezet foglal össze.

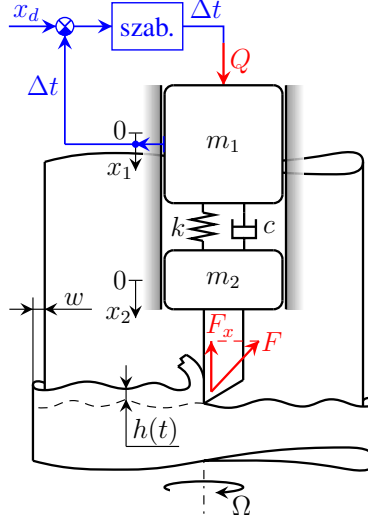
2. MECHANIKAI MODELL

Az felállított mechanikai modellt az 1. ábra mutatja. A mozgásegyenletek alakja a következő:

$$m_1 \ddot{x}_1(t) - c(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)) - k(x_2(t) - x_1(t)) = Q(t), \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2(t) + c(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)) + k(x_2(t) - x_1(t)) = -F_x(t), \quad (2)$$

ahol m_1 és m_2 a szán és a szerszámvég modális tömege, valamint c és k a kettő közötti modális csillapítási tényező és merevség. Az x_1 és x_2 koordináták a szerszámvég és a szán munkadarabhoz viszonyított pozícióját adják meg.



1. ábra. Az esztergálás mechanikai modellje a szán szabályozásának figyelembe vételével

A szánt PID szabályozó mozgatja. Feltételezve, hogy a szán pozícióját és sebességét mérési hiba nélkül mintavételezzük, a szabályozó erő a következő alakban adható meg:

$$Q(t) = -IE_j - Pe_1(t_{j-1}) - D\dot{e}_1(t_{j-1}), \quad t \in (t_j, t_{j+1}], \quad t_j = j\Delta t, \quad j = 1, 2, \dots; \quad (3)$$

ahol I , P és D ún. integráló, arányos és differenciáló tagok, $e_1(t) = x_1(t) - x_d(t)$ a pozíció hiba, valamint $E_j = E_{j-1} + \Delta t e_1(t_{j-1})$ a felhalmozódott (integrált) pozíció hiba. A szán kívánt pályáját $x_d(t) = v_f t$ adja meg, ahol v_f a szerszámvég előírt előtolási sebessége. A pozíció és sebesség mintavételezései között Δt az eltelt mintavételezési idő. A (3) formula feltételezi, hogy a mintavételezett értékek csak Δt időtartammal a mérés után kerülnek feldolgozásra és érvényesülnek a szabályozó erőben. Az $F(t)$ forgácsolási erő előtolási sebesség irányú vetületét a Taylor-féle empirikus formulával [1] számoljuk

$$F_x(t) = K_x w h^\alpha(t) \quad (4)$$

alakban, ahol K_x az előtolás irányába eső forgácsolási erőállandó, α a forgácsolási kitevő és w a forgács szélesség. A forgácsvastagság az 1. ábra alapján a $h(t) = x_2(t) - x_2(t - \tau)$ formulával adható meg, ahol $\tau = 2\pi/\Omega$ a munkadarab egy körbefordulásához szükséges időtartam és Ω a munkadarab szögsebessége. Vegyük észre, hogy (1)–(2) késleltetett differenciálegyenletek, hiszen x_1 és x_2 múltbeli értékei is szerepelnek bennük. Míg az (1) egyenletben x_1 multból vett értékei szakaszonként állandók (ami ún. hibrid differenciálegyenletet eredményez), addig a (2) egyenletben x_2 időkéseése állandó. Az új változó $e_2(t) = x_2(t) - x_d(t)$, dimenziótlan idő $\tilde{t} = \omega_n t$, dimenziótlan időkéseés $\tilde{\tau} = \omega_n \tau$, dimenziótlan mintavételezési idő $\Delta \tilde{t} = \omega_n \Delta t$, specifikus integrált pozíció hiba $\tilde{E}_j = \omega_n E_j$, specifikus előtolási sebesség $\tilde{v}_t = v_f/\omega_n$ és dimenziótlan szögsebesség $\tilde{\Omega} = \Omega/\omega_n$ bevezetésével, valamint a hullámok azonnali elhagyásával (1)–(2) egyenletek az alábbi alakra hozhatók

$$\mu \ddot{e}_1(t) - 2\zeta(\dot{e}_2(t) - \dot{e}_1(t)) - e_2(t) + e_1(t) = q(t), \quad (5)$$

$$\ddot{e}_2(t) + 2\zeta(\dot{e}_2(t) - \dot{e}_1(t)) + e_2(t) - e_1(t) = -f_x(t). \quad (6)$$

Itt $\omega_n = \sqrt{k/m_2}$ és $\zeta = c/(2m_2\omega_n)$ a szerszámvéghez tartozó sajátkörfrekvencia és relatív csillapítási tényező, míg $\mu = m_1/m_2$ a modális tömegek aránya. A dimenziótlan szabályozó erőt és forgácsolási erőt $q(t) = Q(t)/m_2\omega_n^2$ és $f_x(t) = F_x(t)/(m_2\omega_n^2)$ jelöli.

3. ANALITIKUS STABILITÁSI VIZSGÁLAT

Az (5) egyenletben szereplő, diszkrét időpillanatokhoz tartozó, szakaszonként állandó tagok egyenértékűek időben változó időkéssel rendelkező tagokkal, így a dimenziótlantított szabályozó erő felírható

$$q(t) = -k_i E_j - k_p e_1(t - \rho(t)) - k_d \dot{e}_1(t - \rho(t)), \quad j = 1, 2, \dots; \quad (7)$$

alakban, ahol $k_i = I/(m_2 \omega_n^3)$, $k_p = P/(m_2 \omega_n^2)$ és $k_d = D/(m_2 \omega_n)$ a dimenziótlant integráló, arányos és differenciáló tagok, $E_j = E_{j-1} + \Delta t e_1(t - \rho(t))$ és az időben periodikusan változó dimenziótlant időkéssel

$$\rho(t) = \Delta t + t - t_j, \quad t \in (t_j, t_{j+1}]. \quad (8)$$

Közelítsük $\rho(t)$ dimenziótlant időkéssel az átlagával, $\bar{\rho} = 3\Delta t/2$ alakban. Ezzel a dimenziótlant szabályozó erő

$$q(t) \approx -k_i E_j - k_p e_1(t - \bar{\rho}) - k_d \dot{e}_1(t - \bar{\rho}), \quad j = 1, 2, \dots \quad (9)$$

alakban adódik, ahol $E_j = E_{j-1} + \Delta t e_1(t - \bar{\rho})$. A specifikus integrált pozíció hibát tovább közelítve integrállal, a szabályozó erő a

$$q(t) \approx -k_i \int_0^t e_1(s - \bar{\rho}) ds - k_p e_1(t - \bar{\rho}) - k_d \dot{e}_1(t - \bar{\rho}) \quad (10)$$

közelítő alakban adható meg. A szabályozó erő átírása (7) alakról (10) alakra azt eredményezi, hogy az (5)–(6) késleltetett differenciálegyenlet rendszer csak állandó időkéssel rendelkező késleltetett tagokat tartalmaz. Állandó időkésekkel rendelkező lineáris dinamikai rendszerek stabilitási tartományainak meghatározására pedig alkalmazható a D-szeparáció módszere (lásd [5]-ben a 2. fejezetet), amely analitikus eredményeket ad a stabilitási határookra a rendszerparaméterek terében. A D-szeparáció módszer alkalmazása előtt linearizáljuk (5)–(6) rendszert az egyensúlyi helyzete körül.

Az új változó

$$E(t) = \int_0^t e_1(s) ds + E(0) \quad (11)$$

bevezetésével az (5)–(6) az alábbi alakot ölti:

$$\mu \ddot{E}(t) - 2\zeta (\dot{e}_2(t) - \ddot{E}(t)) - e_2(t) + \dot{E}(t) = -k_i (E(t - \bar{\rho}) - E(-\bar{\rho})) - k_p \dot{E}(t - \bar{\rho}) - k_d \ddot{E}(t - \bar{\rho}), \quad (12)$$

$$\ddot{e}_2(t) + 2\zeta (\dot{e}_2(t) - \ddot{E}(t)) + e_2(t) - \dot{E}(t) = -\frac{K_x w}{m_2 \omega_n^2} (e_2(t) - e_2(t - \tau) + v_f \tau)^\alpha. \quad (13)$$

Könnyen belátható, hogy (12)–(13) egyensúlyi helyzete

$$E_e = E(-\bar{\rho}) - \frac{K_x w}{k_i m_2 \omega_n^2} (v_f \tau)^\alpha, \quad (14)$$

$$e_{2,e} = -\frac{K_x w}{m_2 \omega_n^2} (v_f \tau)^\alpha. \quad (15)$$

Az egyensúlyi helyzet körül történő linearizálás és $\xi(t) = E(t) - E_e$, $\eta(t) = e_2(t) - e_{2,e}$ változók bevezetése után adódik hogy

$$\mu \ddot{\xi}(t) - 2\zeta (\dot{\eta}(t) - \ddot{\xi}(t)) - (\eta(t) - \dot{\xi}(t)) = -k_i \xi(t - \bar{\rho}) - k_p \dot{\xi}(t - \bar{\rho}) - k_d \ddot{\xi}(t - \bar{\rho}), \quad (16)$$

$$\ddot{\eta}(t) + 2\zeta (\dot{\eta}(t) - \ddot{\xi}(t)) + \eta(t) - \dot{\xi}(t) = H (\eta(t - \tau) - \eta(t)), \quad (17)$$

ahol $H = K_x w q (v_f \tau)^{q-1} / (m_2 \omega_n^2)$ a specifikus vágási tényező. A (16)–(17) rendszer karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + 2\zeta \lambda + 1 - \frac{(2\zeta \lambda + 1)^2 \lambda}{\mu \lambda^3 + (2\zeta + k_d e^{-\lambda \bar{\rho}}) \lambda^2 + (1 + k_p e^{-\lambda \bar{\rho}}) \lambda + k_i e^{-\lambda \bar{\rho}}} = H (e^{-\lambda \tau} - 1). \quad (18)$$

A (16)–(17) rendszer akkor és csak akkor stabilis, ha a (18) karakterisztikus egyenlet összes gyökének a valós része negatív. Mivel (18) egyenletnek végtelen sok gyöke van, így ennek ellenőrzése a karakterisztikus egyenlet megoldásával nem lehetséges. A D-szeparáció módszerének segítségével azonban előállíthatók zárt alakban a stabilitási határok. Ez a módszer ún. D-görbéket határoz meg úgy, hogy a karakterisztikus gyök helyére $\lambda = i\omega$ értéket helyettesít. Ezek után kirendezve a valós és képzetes részeket (18) az alábbi egyenleteket szolgáltatja:

$$C = H(\cos(\omega \tau) - 1), \quad (19)$$

$$D = -H \sin(\omega \tau), \quad (20)$$

ahol

$$C = -\omega^2 + 1 - \frac{a(\omega)u(\omega) + b(\omega)v(\omega)}{u^2(\omega) + v^2(\omega)}, \quad (21)$$

$$D = 2\zeta\omega - \frac{b(\omega)u(\omega) - a(\omega)v(\omega)}{u^2(\omega) + v^2(\omega)} \quad (22)$$

és

$$a(\omega) = -4\zeta\omega^2, \quad u(\omega) = -2\zeta\omega^2 + (k_i - k_d\omega^2) \cos(\omega\bar{\rho}) + k_p\omega \sin(\omega\bar{\rho}), \quad (23)$$

$$b(\omega) = \omega - 4\zeta^2\omega^3, \quad v(\omega) = -\mu\omega^3 + \omega + (k_d\omega^2 - k_i) \sin(\omega\bar{\rho}) + k_p\omega \cos(\omega\bar{\rho}). \quad (24)$$

A (19) és (20) egyenletek négyzetre emelésével és összegzésével az alábbi egyenlethez jutunk

$$-2H^2(\cos(\omega\tau) - 1) = C^2 + D^2. \quad (25)$$

Innen a (19) összefüggés felhasználásával H kifejezhető:

$$H = \frac{C^2 + D^2}{-2C}. \quad (26)$$

A (19) egyenletet elosztva (20) egyenlettel, az alábbi összefüggést kapjuk

$$\frac{C}{D} = \frac{1 - \cos(\omega\tau)}{\sin(\omega\tau)} = \tan\left(\frac{\omega\tau}{2}\right). \quad (27)$$

Innen $\Omega = 2\pi/\tau$ kifejezhető:

$$\Omega = \frac{\omega\pi}{j\pi + \arctan\left(\frac{C}{D}\right)}, \quad j = 0, 1, \dots \quad (28)$$

Az (Ω, H) paraméter síkon (26) és (28) egyenletek paraméterezett D-görbék definiálnak $\omega \in [0, \infty)$ futó paraméterrel. A D-görbék olyan résztartományokra osztják a rendszerparaméterek terét, amelyekben a pozitív valós résszel rendelkező (instabil) gyökök száma állandó. A Stépán formulák (lásd [6]-ban a 2.19. tételt) segítségével pedig meghatározható, hogy a paraméter tér valamely pontjában pontosan hány instabil gyök van. Ezzel, a paraméterek terének egy véges részében feltérképezhetők a stabil paraméter tartományok.

4. NUMERIKUS STABILITÁSI VIZSGÁLAT

Hasonlóan, mint a (10) folytonos szabályozó erő esetén, a (3) diszkrét idejű szabályozás esetén is elvégezhető az (5)–(6) rendszer linearizálása. Ez a következő hibrid késleltetett differenciálegyenlet rendszerhez vezet

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) + \mathbf{B}\mathbf{y}(t - \tau) + \mathbf{C}\mathbf{y}(t_{j-1}) + \mathbf{k}E_{j-1}, \quad t \in (t_j, t_{j+1}], \quad j = 1, 2, \dots; \quad (29)$$

$$E_j = E_{j-1} + \mathbf{d}^T \mathbf{y}(t_{j-1}), \quad j = 1, 2, \dots; \quad (30)$$

ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\mu} & -\frac{2\zeta}{\mu} & \frac{1}{\mu} & \frac{2\zeta}{\mu} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2\zeta & -1 - H & -2\zeta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_i\Delta t + k_p}{\mu} & -\frac{k_d}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (31)$$

valamint

$$\mathbf{y}^T(t) = [e_1(t) \quad \dot{e}_1(t) \quad e_2(t) \quad \dot{e}_2(t)], \quad \mathbf{d}^T = [\Delta t \quad 0 \quad 0 \quad 0], \quad \mathbf{k}^T = \left[0 \quad -\frac{k_i}{\mu} \quad 0 \quad 0\right]. \quad (32)$$

A (29)–(30) rendszer

$$\mathbf{y}_t(\theta) = \mathbf{y}(t + \theta), \quad \theta \in [-\gamma, 0] \quad (33)$$

függvény szegmens bevezetésével az alábbi hibrid operátor differenciálegyenlet alakra hozható (lásd [7]-ben a 7. fejezetet)

$$\dot{\mathbf{y}}_t = \mathcal{G}\mathbf{y}_t + \mathbf{r}_j, \quad t \in (t_j, t_{j+1}], \quad j = 1, 2, \dots; \quad (34)$$

$$E_j = E_{j-1} + \mathbf{d}^T \mathbf{y}(t_{j-1}), \quad j = 1, 2, \dots; \quad (35)$$

ahol a függvénysszegmens hossza $\gamma = \max\{\tau, \Delta t\}$ és $\mathcal{G} : \mathbb{W}_2^1 \rightarrow \mathbb{W}_2^1$, lineáris operátor az alábbi módon van definiálva

$$\mathcal{G}\mathbf{y}_t = \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{y}_t(0) + \mathbf{B}\mathbf{y}_t(-\tau) & \text{ha } \theta = 0, \\ \frac{d}{d\theta}\mathbf{y}_t(\theta) & \text{ha } \theta \in [-\gamma, 0). \end{cases} \quad (36)$$

Itt \mathbb{W}_2^1 Szoboljev tér az \mathbb{L}_2 négyzetesen integrálható függvények halmazának azon részhalmazát jelöli, amelyben a függvények első gyenge deriváltjai véges \mathbb{L}_2 normával rendelkeznek. A (34) egyenletben

$$\mathbf{r}_j = \begin{cases} \mathbf{C} \mathbf{y}_{t_j}(-\Delta t) + \mathbf{k} E_{j-1} & \text{ha } \theta = 0, \\ \mathbf{0} & \text{ha } \theta \in [-\gamma, 0) \end{cases} \quad (37)$$

egy Δt időszakaszokon keresztül állandó értékű függvény szegmenst jelöl. A (34) egyenletet [8] alapján, pszeudo-spektrális kollokáció segítségével diszkrétizáljuk. A módszer az \mathbf{y}_t függvény szegmenst a Lagrange interpolációs polinomjával közelíti:

$$\mathbf{y}_t(\theta) \approx \sum_{k=1}^{n+1} l_k(\theta) \mathbf{y}_t(\theta_k), \quad \theta_k \in [-\gamma, 0], \quad (38)$$

ahol $\theta_k, k = 1, \dots, n+1$ az interpolációs alappontok és $l_k(\theta), k = 1, \dots, n+1$ a Lagrange-féle alappolinomok. A $z = 2\theta/\gamma + 1$ koordináta transzformáció és (38) közelítő megoldás (34) operátor differenciálegyenletbe való behelyettesítése után egyenlőséget előírva az interpolációs alappontokon, (34)-re az

$$\dot{\mathbf{Y}}(t) = \mathbf{G} \mathbf{Y}(t) + \mathbf{P} \mathbf{Y}(t_j) + \mathbf{K} E_{j-1}, \quad t \in (t_j, t_{j+1}], \quad j = 1, 2, \dots \quad (39)$$

alakú véges dimenziós közefűtést kapjuk. Feltételezve, hogy az interpolációs alappontok

$$z_k = \cos\left(\frac{(k-1)\pi}{n}\right), \quad k = 1, \dots, n+1 \quad (40)$$

alakban adottak (vagyis azok a másodfajú Chebyshev pontok), $\mathbf{G}, \mathbf{P} \in \mathbb{R}^{4(n+1) \times 4(n+1)}$ mátrixok az alábbi rész-mátrixokból állíthatók elő

$$\mathbf{G}_{i,k} = \begin{cases} \mathbf{A} \delta_{1,k} + \mathbf{B} l_k(1 - 2\tau/\gamma) & \text{ha } i = 1, \\ \frac{2}{\tau} l'_k(z_i) \mathbf{I} & \text{ha } i = 2, \dots, n+1, \end{cases} \quad (41)$$

$$\mathbf{P}_{i,k} = \begin{cases} \mathbf{C} l_k(1 - 2\Delta t/\gamma) & \text{ha } i = 1, \\ \mathbf{0} & \text{ha } i = 2, \dots, n+1, \end{cases} \quad (42)$$

ahol $k = 1, \dots, n+1$ és $\delta_{i,k}$ a Kronecker-delta szimbólum. Az $\mathbf{Y}(t), \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{4(n+1) \times 1}$ vektorok az alábbi elemekből állnak elő

$$\mathbf{Y}_i(t) = \mathbf{y}_t(z_i), \quad i = 1, \dots, n+1; \quad \mathbf{K}_i = \begin{cases} \mathbf{k} & \text{ha } i = 1, \\ \mathbf{0} & \text{ha } i = 2, \dots, n+1. \end{cases} \quad (43)$$

A (38) közelítést alkalmazva (35)-re kapjuk, hogy

$$E_j = E_{j-1} + \mathbf{D}^T \mathbf{Y}(t_j), \quad j = 1, 2, \dots; \quad (44)$$

ahol $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{4(n+1) \times 1}$ vektor elemei az alábbiak szerint állnak elő

$$\mathbf{D}_k = \mathbf{d} l_k(1 - 2\Delta t/\gamma), \quad k = 1, \dots, n+1. \quad (45)$$

A Lagrange-féle alappolinomok egy tetszőleges $z \in [-1, 1]$ pontban megadhatók az ún. baricentrikus képlettel:

$$l_k(z) = \frac{\frac{w_k}{z - z_k}}{\sum_{r=1}^n \frac{w_r}{z - z_r}}, \quad (46)$$

míg a Lagrange-féle alappolinomok deriváltjai az interpolációs alappontokban a következő formulával számolhatóak

$$l'_k(z_i) = \begin{cases} \frac{w_k/w_i}{z_i - z_k} & k \neq i, \\ -\sum_{r=1, r \neq k}^n \frac{w_r/w_k}{z_k - z_r} & k = i. \end{cases} \quad (47)$$

Itt az ún baricentrikus súlyokat az alábbi összefüggések adják meg

$$w_k = \frac{1}{\omega'(z_k)}, \quad \omega(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_k). \quad (48)$$

A (46)–(48) képletek levezetése megtalálható [9]-ben. A (34)–(35) rendszer (39) és (44) egyenletek által meghatározott véges dimenziós approximációjának stabilitási vizsgálata már könnyen elvégezhető a [10]-ben leírtakhoz hasonlóan. A (39) közönséges differenciálegyenlet megoldását t_j időpillanattól indítva és a t_{j+1} időpillanatban kiszámítva kapjuk, hogy

$$\mathbf{Y}(t_{j+1}) = \mathbf{N} \mathbf{Y}(t_j) + \mathbf{M} E_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots; \quad (49)$$

ahol

$$\mathbf{N} = \mathbf{e}^{\mathbf{G}\Delta t} + (\mathbf{e}^{\mathbf{G}\Delta t} - \mathbf{I}) \mathbf{G}^{-1} \mathbf{P}, \quad \mathbf{M} = (\mathbf{e}^{\mathbf{G}\Delta t} - \mathbf{I}) \mathbf{G}^{-1} \mathbf{K}. \quad (50)$$

Itt megjegyezzük, hogy \mathbf{G} mátrix rosszul kondicionált, ami azt eredményezi, hogy az inverze szinguláris. A gyakorlati számítások során azonban \mathbf{G} mátrix invertálása kiküszöbölhető, hiszen a mátrix exponenciális definíciójának felhasználásával

$$(\mathbf{e}^{\mathbf{G}\Delta t} - \mathbf{I}) \mathbf{G}^{-1} = \Delta t \left(\mathbf{I} + \frac{1}{2!} \mathbf{G}\Delta t + \frac{1}{3!} \mathbf{G}^2 \Delta t^2 + \frac{1}{4!} \mathbf{G}^3 \Delta t^3 + \dots \right) \quad (51)$$

jól közelíthető egy véges összeggel. A (49) egyenletet kiegészítve (44) egyenlettel az alábbi leképezést kapjuk

$$\hat{\mathbf{Y}}_{j+1} = \Phi \hat{\mathbf{Y}}_j, \quad j = 1, 2, \dots; \quad (52)$$

ahol $\hat{\mathbf{Y}}_j \in \mathbb{R}^{(4(n+1)+1) \times 1}$ vektor és $\Phi \in \mathbb{R}^{(4(n+1)+1) \times (4(n+1)+1)}$ mátrix felépítését a 2. ábra mutatja. Az ábrán az egyszerűsített $\mathbf{Y}_j = \mathbf{Y}(t_j)$ jelölés szerepel.

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & \begin{bmatrix} \mathbf{D}^T \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{N} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{Y}}_j = \begin{bmatrix} E_{j-1} \\ \mathbf{Y}_j \end{bmatrix}$$

2. ábra. Az (52) differenciaegyenlet tagjainak felépítése

Az (52) differencia egyenlet akkor és csak akkor stabil, ha Φ összes sajátértéke (karakterisztikus multiplikátora) abszolút értékben kisebb egynél. Ezzel a feltétellel tetszőleges rendszerparaméter esetén ellenőrizhető a közelítő, (39) és (44) egyenletek által meghatározott rendszer stabilitása.

5. EREDMÉNYEK

A gépészeti szakirodalomban az esztergálás regeneratív rezgéseit leíró modellek stabilitására vonatkozó eredményeket az (Ω, w) vagy (Ω, H) paraméterek síkján szokták ábrázolni stabilitási térképek formájában. Ezen stabilitási térképeken a stabilitási határok mellett a stabil, illetve az instabil állapotokhoz tartozó paraméter tartományokat tüntetik fel. Mivel az $\Omega w h_0$ szorzat adja az anyagleválasztási hányadot, ahol a h_0 névleges forgácsvastagság az adott megmunkálási művelethez van beállítva, így Ω és w növelésével érhető el az anyagleválasztási hányad növelése. A megmunkálási folyamat megtervezése során fontos szempont az anyagleválasztási hányad maximalizálása, ennek következtében ezek a stabilitási térképek hasznos információt szolgáltatnak a gépkezelő számára. Mivel negatív w forgácszsélességnek és negatív h_0 forgácsvastagságnak nincsen fizikailag értelme, így a stabilitási térképeket csak pozitív w vagy pozitív H értékekre szokták megrajzolni.

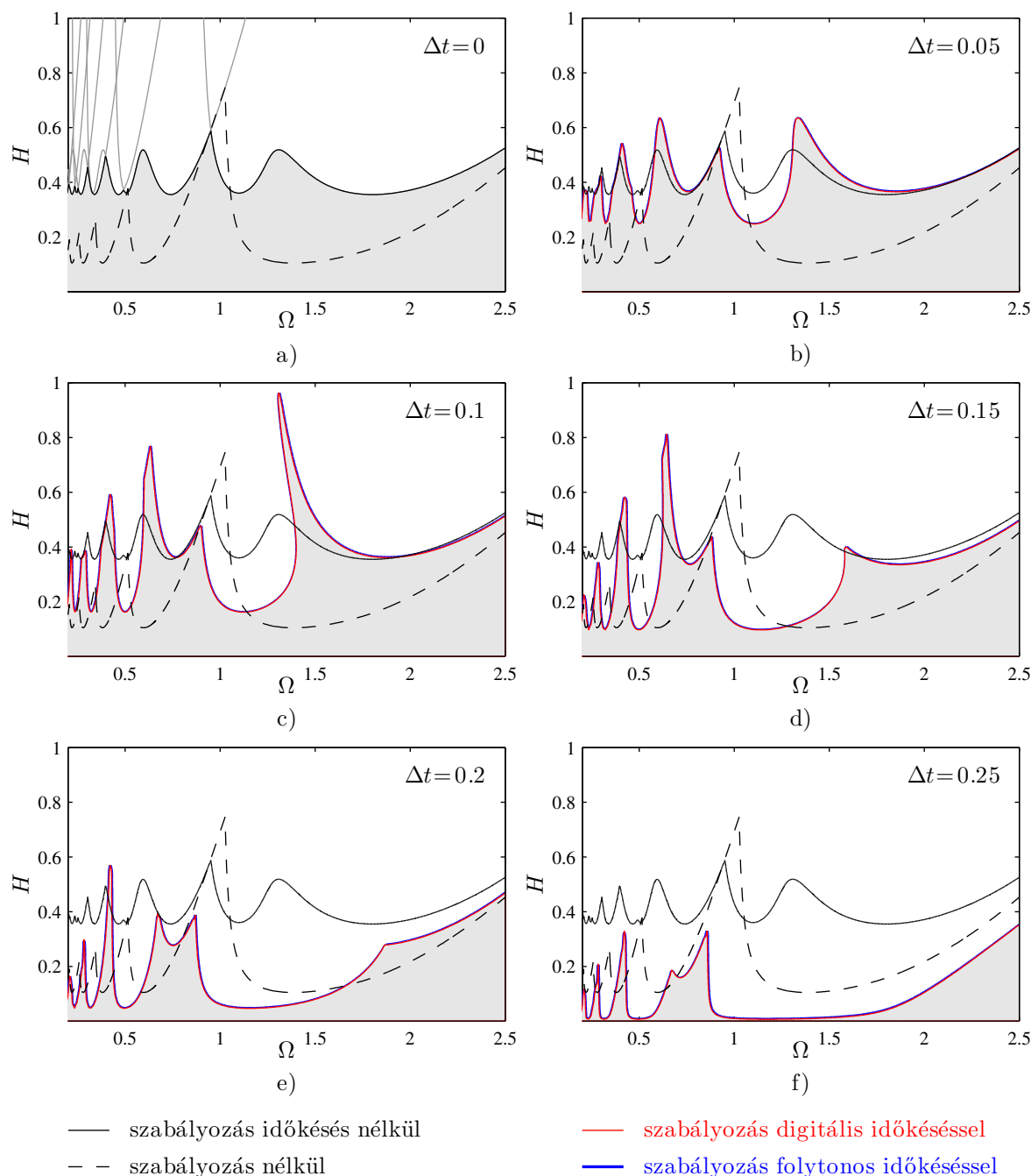
ζ	μ	k_i	k_p	k_d
0.05000	7.262	0.3316	7.625	2.828

1. táblázat. A [4] riportban ismertett rendszerparaméterek és az optimális szabályozási paraméter kombináció

A [4] riport egy valós forgácsoló gép paramétereit használva, az időkésés nélküli szabályozás esetére számítja ki a folyamat stabilitási térképeit. Ezen felül, figyelembe véve a szabályozási paraméterekre adott korlátokat, meghatározza azt az optimális szabályozási paraméter kombinációt, amely azt a legnagyobb forgácsvastagságot adja, amely esetén az adott paramétertartományon belül a megmunkálás stabilis a fordulatszámától függetlenül (fordulatszámától független kritikus forgácsvastagság). A forgácsoló gép paramétereit és az optimális szabályozási paraméter kombinációt az 1. táblázat mutatja. A 3/a) ábra a szabályozás nélküli modell (szaggatott fekete görbe), illetve az időkésés nélküli szabályozással rendelkező modell (fekete görbe) stabilitási határait mutatja a (26) és (28) által definiált D-görbékkel (szürke görbék) és a stabil paraméter tartománnyal (szürke terület) együtt. A 3/b)–3/f) ábrák növekvő Δt dimenziótlan mintavételezési idő mellett mutatják a stabil megmunkáláshoz tartozó paraméter tartományok határait. Ezen ábrák az (52) numerikus közelítés (piros görbe) valamint (26) és (28) által adott analitikus közelítés (kék görbe) eredményeit vetik össze a késleltetés nélküli szabályozással rendelkező modell (fekete görbe) és az általánosan használt, szabályozás nélküli modell (szaggatott fekete görbe) eredményeivel.

Az eredményekből megállapítható, hogy a mintavételezési idő növekedésével a forgácsolási folyamat stabilitási tulajdonságai romlanak. A [4] riportban ismertett forgácsoló gép esetén $\omega_n = 30$ [Hz] a szerszámvéghez tartozó sajátfrekvencia. Mivel a forgácsoló gépek jellemző mintavételezési frekvenciája $1 \leq f_s \leq 50$ [kHz], így a [4]-ben ismertett forgácsoló gép esetén a dimenziótlan mintavételezési idő $0.003770 \leq \Delta t \leq 0.1885$. Megállapítható tehát, hogy a mintavételezési idő figyelembe vétele gyakorlati szempontból is fontos lehet. Érdeemes megfigyelni, hogy a vizsgált paraméterek mellett, (10) folytonos szabályozó erő modell szinte teljesen egyező eredményeket

szolgált a (7) digitális szabályozó erő modellel. Ez számítási szempontból jelentős eredmény, hiszen (10) szabályozó erővel zárt alakban tudjuk megadni a stabilitási határokat. A stabilitási határok kiszámítása zárt alakú képlettel pedig jelentősen gyorsabb, mint numerikus módszer segítségével. Ugyanakkor az eredményeket egy választott paraméter kombináció mellett közöltük, így kérdéses, hogy (7) közelítése (10) formulával milyen feltételek mellett ad azonos eredményt a stabilitásra.



3. ábra. Stabilitási tartományok különböző Δt dimenzióatlan mintavételezési idők esetén az 1. táblázatban ismertetett paraméterek mellett

6. ÖSSZEFOGLALÁS

Jelen tanulmányban az esztergálási folyamat stabilitását vizsgáltuk, figyelembe véve a szerszámot mozgató szán szabályozási paramétereinek hatását, valamint a szabályozó digitális voltát. A fent ismertetett eredmények azt mutatják, hogy a szán szabályozásának pontos, mintavételezést figyelembe vevő modellezése fontossá válhat, ha Δt dimenzióatlan mintavételezési idő kellően nagy. A digitális szabályozó erőt egy folytonos, időkéssel rendelkező szabályozó erővel helyettesítve az alkotott modell stabilitási térképei megegyeztek a vizsgált rendszerparaméterek esetén. Ez a közelítés lehetővé teszi a stabilitási határok analitikus meghatározását.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Az ezekhez az eredményekhez vezető kutatás az Európai Kutatási Tanács (ERC) részéről, az Európai Közösség hetedik keretprogramjából (2007-2013), az EKT 340889 sz. haladó kutatási támogatási megállapodása (Advanced Grant Agreement) valamint a K105433 sz. OTKA projekt alapján finanszírozásban részesült.

HIVATKOZÁSOK

- [1] F.W. TAYLOR. On the art of cutting metals. *Transaction of ASME*, 28:31–350, 1907.
- [2] J. TLUSTY, A. POLACEK, C. DANEK, J. SPACEK. *Selbsterregte Schwingungen an Werkzeugmaschinen*. VEB Verlag Technik, Berlin, 1962.
- [3] S.A. TOBIAS. *Machine tool vibrations*. Blackie, London, 1965.
- [4] X. BEUDAERT. Chatter and drive. *ideko IK4, Technical report*, 9:1–13 , 2014.
- [5] T. INSPERGER, G. STÉPÁN. *Semi-discretization for time-delay systems*. Springer, New York, 2011.
- [6] G. STÉPÁN. *Retarded dynamical systems*. Longman, Harlow, 1989.
- [7] J.K. HALE, S.M.V. LUNEL. *Introduction to functional differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [8] D. BREDÁ, S. MASET, R. VERMIGLIO. Pseudospectral differencing methods for characteristic roots of delay differential equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 27(2):482–495, 2005.
- [9] J.P. BERRUT, F.L. TREFETHEN. Barycentric Lagrange interpolation. *SIAM Review*, 46(3):501–517, 2004.
- [10] E. ENIKOV, G. STEPAN. Micro-chaotic motion of digitally controlled machines. *Journal of Vibration and Control*, 4:427–443, 1998.